Biblioteca del Fútbol Ecuatoriano - III

Mete gol, gana

El fútbol y la economía

Bolívar Vásquez - El Comercio

Introducción y selección de textos:

Pablo Samaniego Ponce

FLACSO

QUITO
Distrito Metropolitano

EMAAP-Q

QUITO

EL COMERCIO

La Biblioteca del Fútbol Ecuatoriano es un juego en equipo, en el que han participado muchas personas e instituciones.

ENTIDADES GESTORAS
Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (FLACSO-Ecuador)
Municipio del Distrito Metropolitano de Quito (MDMQ)
Empresa Municipal de Agua Potable y Alcantarillado (EMAAP-Q)
Diario El Comercio

EDITOR Y COORDINADOR GENERAL
Fernando Carrión

EDITORES
Raúl Pérez Torres, Volumen I
Kintto Lucas, Volumen II
Pablo Samaniego, Volumen III
Fernando Carrión, Volumen IV
Fernando Carrión, Volumen V

AUTORES

Volumen I
Demetrio Aguilera Malta, Jorge Andrade, Fernando Arias, Fernando Artieda, Carlos Béjar Portilla, Roberto Bonafont, Andrés Carrión, Fernando Carrión, Marcelo Cevallos, Edgar Allan García, Paúl Herman, Patricio Herrera, Kintto Lucas, Galo Mora, Juan Carlos Morales, Pablo Lucio Paredes, Raúl Pérez Torres, Juan Reyes Daza, Edmundo Ribadeneira, Carlos Ríos Roux, Antonio Rodríguez, Carlos Rodríguez Coll, Abdón Ubidia, Sócrates Ulloa, Humberto Vacas Gómez.

Volumen II
Vicente Rommel Berrezueta B., Roberto Bonafont, Jacinto Bonilla Prado, Fernando Carrión, Ricardo Cachón, Otón Chávez, Martha Córdova Avilés, Francisco Febres Cordero, Washington Herrera, Alfonso Laso Ayala, Alfonso Laso Bermeo, Kintto Lucas, Esteban Michelena, Alejandro Moreano, Blasco Moscoso Cuesta, Vito Muñoz, Jaime Naranjo, Pepe Navarro Guzmán, Fernando Oña, Gabriela Paz y Miño, Jorge Ribadeneira Araujo, Martha Cecilia Ruiz, Ricardo Valconcellos, Mauro Velásquez.

Volumen III
Víctor Aguilar, Macarena Bustamante, Fernando Carrión, Edward Jiménez, Kevin Jiménez, Jaime Naranjo, Pablo Lucio Paredes, Pablo Samaniego, Juan Sarmiento, Wilson Ruales, Sandra Vela.

Volumen IV
Fernando Bustamante, Fernando Carrión, Simón Espinosa Jalil, Xavier Lasso, Jaime Naranjo, Carlos Melgarejo, Carlos Ríos Roux, Pedro Santos, René Vallejo, Javier Velásquez Villacís.

Volumen V
Isabel Carrera, Fernando Carrión, Patricio Falconí, Ariruma Kowii, Jaime Naranjo, Xavier Ponce C. Carlos Pontón, Daniel Pontón, Jenny Pontón, Simón Espinosa Cordero, Jacques Ramírez, Francisco Rhon.

EQUIPO DE TRABAJO
Milagros Aguirre: Entrevistas
Manuel Dammert Guardia: Asistente Editorial
El Comercio: Fotografías
Alicia Torres: Edición
Gonzalo Estupiñán: Asistente Editorial
Antonio Mena: Diseño y Diagramación
Leonidas Molina: Administración
Jaime Naranjo: Estadísticas

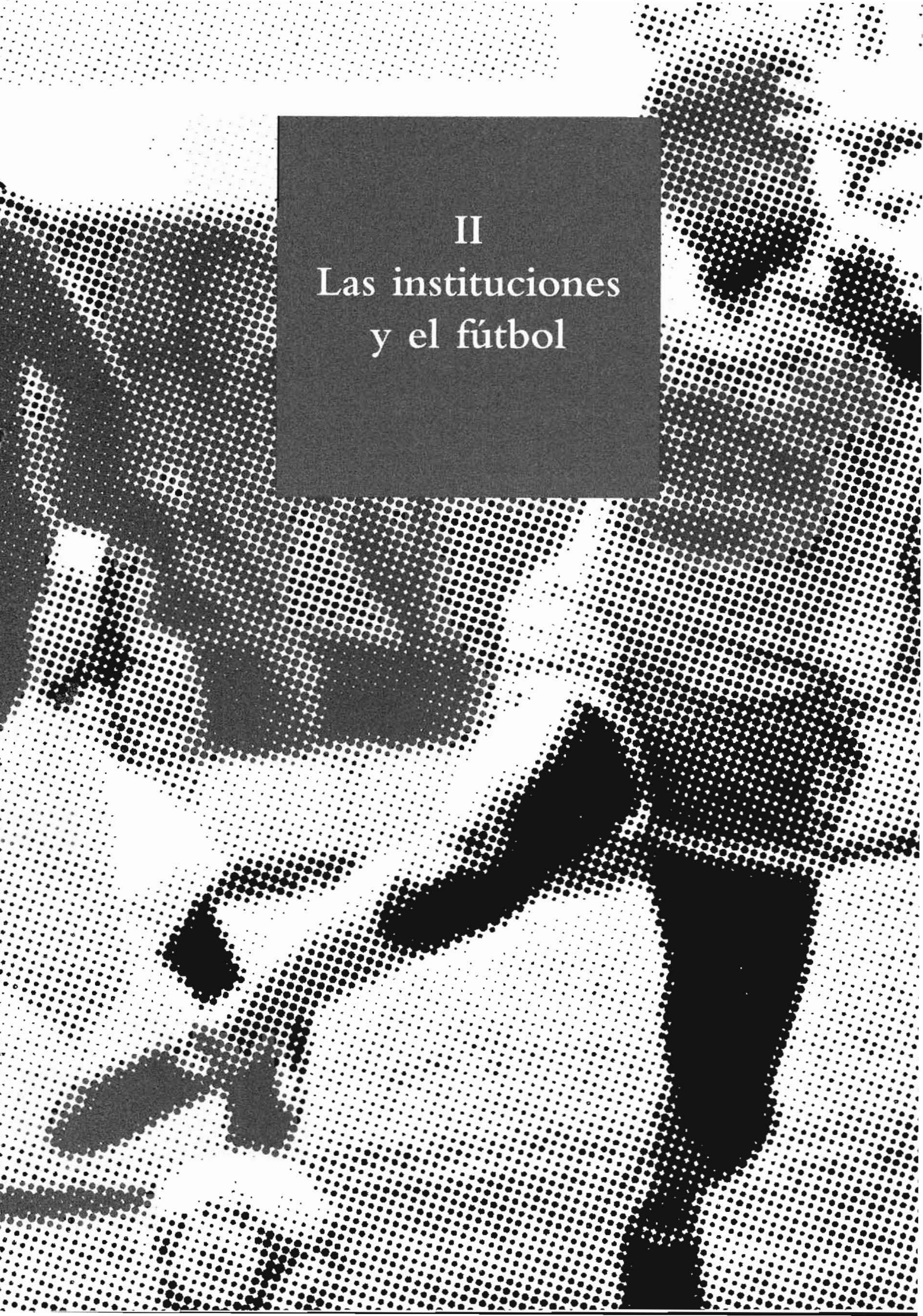
Fotografías: Archivo Diario El Comercio
Impresión: Imprenta Mariscal

ISBN SERIE: 978-9978-67-122-1
ISBN: 978-9978-67-126-9
© FLACSO Sede Ecuador
La Pradera E7-174 y Diego de Almagro
Telf.: (593-2)3238888
Fax: (593-2)3237960
flacso@flacso.org.ec
www.flacso.org.ec
Quito, Ecuador
Primera edición: diciembre de 2006

Índice

III. Estudios de caso y casos de estudio

II
Las instituciones y el fútbol



Eduardo Valenzuela - El Comercio

Juegos cuánticos: su majestad el fútbol, un juego cooperativo correlacionado

Edward Jiménez*

Resumen

El fútbol es un juego de competición, en el que simultáneamente se presentan ambos en cooperación al interior y competición con el equipo oponente. Además, se muestra que la interacción entre dos jugadores de un mismo equipo, está representada por el juego bimatricial[1] del dilema del prisionero , mientras que la interacción entre dos jugadores de distinto equipo, está representada por atrition . A través de los operadores de correlación usados en computación cuántica (*entanglement*) , se demuestra, que para lograr un equipo de fútbol cohesionado en objetivos, disciplinado en el respero a normas internas y cooperativo en las acciones es necesario lograr la correlación matemática de las estrategias (jugadores), como mínimo en grupos exhaustivos y extensivos de dos a dos. Finalmente, el operador de *entanglement* aplicado a un juego simétrico, jamás reduce el valor de la probabilidad de cooperación.

* Físico Nuclear, Escuela Politécnica Nacional; Master Informática, Escuela Politécnica Nacional; Master en Microeconomía, Universidad Saint Etienne . Francia; PhD(c), Microeconomía, Universidad Lumiere, Francia; Experimental Economics, Todo1 Services Inc, Miami Fl 33126.GATE, UMR 5824 CNRS - France. Unidad de Investigación y Desarrollo Tecnológico de Petroecuador (imenez@petroecuador.com.ec)

El autor agradece al grupo de investigación del Hidrógeno en Petroecuador y en especial al Doctor Melio Sáenz, por sus ideas clarificadoras. Además, no puede pasar por alto mencionar la colaboración prestada por Ec. Gonzalo Pozo, de Multienlace.

1 Cuando intervienen dos jugadores, los resultados de las acciones por ellos asumidas se puede representar gráficamente en una matriz de dos dimensiones (por ejemplo, una 2 por 2)

2 El dilema del prisionero es un ejemplo claro pero atípico de un problema de suma no nula. En este problema de teoría de juegos, como en otros muchos, se supone que cada jugador, de modo independiente, trata de maximizar su propia ventaja sin importarle el resultado del otro jugador. Las técnicas de análisis de la teoría de juegos estándar, por ejemplo determinar el equilibrio de Nash, pueden llevar a cada jugador a escoger traicionar al otro, pero curiosamente ambos jugadores obtendrían un resultado mejor si colaborasen. Desafortunadamente (para los prisioneros), cada jugador está incentivado individualmente para defraudar al otro, incluso tras prometerle colaborar. Éste es el punto clave del dilema.

3 Puede entenderse como desgaste. Un ejemplo de ello es el de un juego en el que se pierde cuando uno de los dos jugadores realiza un movimiento cualquiera; mantenerse inmóvil implica desgaste físico.

4 Se puede traducir como entrelazamiento cuántico.

Introducción

La cooperación no es solamente el resultado de la coordinación, también es el resultado de la correlación de acciones o estrategias. Esta correlación de estrategias tiene un nombre en la ciencia de la computación cuántica (*entanglement*). El *entanglement* indica que si dos jugadores tomados dos a dos están correlacionados, entonces sin necesidad de emisión de mensajes o información, la acción del uno determina la acción del otro. Puede existir una correlación de tres o más jugadores.

Aunque, el fútbol es un proceso secuencial, donde un jugador envía la pelota a otro, este a otro y así sucesivamente. El resultado final del *entanglement* puede ser una cadena de acciones, lideradas por un objetivo común invariante durante todo el partido de fútbol, ganar el partido avanzando siempre hacia el lado opuesto. Si los jugadores están correlacionados dos a dos entonces la probabilidad de obtener un resultado cooperativo o de equipo es mayor. El principal teorema de este artículo muestra que jugadores en *entanglement* siempre aumentan la cooperación en un juego dinámico. Vale la pena aclarar, que un juego dinámico, es un juego que evoluciona en el tiempo, por prueba y error, por coordinación de acciones o por correlación indisoluble de estrategias. Un juego cooperativo puede llegar a la consecución del objetivo común.

El Teorema del *entanglement*, no garantiza el triunfo de un equipo que demuestra correlación entre sus jugadores, simplemente dice que la cooperación es mayor y, por lo tanto, los resultados que requieren trabajo en equipo se facilitan o son más probables (ver entanglement en Einstein, Podolsky, and Rosen, 1935; Eisert, Wilkens, Lewenstein 1999; y Meyer 1995). La palabra correlacionado en el lenguaje del fútbol significa, equipo cohesionado, donde todos interactúen con todos, conocen sus fortalezas y sus debilidades.

Entendemos por correlación, "correspondencia o relación recíproca entre dos o más elementos o series de elementos," estos elementos pueden ser jugadores o estrategias. La relación es también una correspondencia entre jugadores o estrategias, pero sin la característica de reciprocidad, que es propia de la cooperación. Algunos autores manifiestan que la cooperación real es sinónimo de reciprocidad. En síntesis, es más enriquecedor en las relaciones humanas lograr correlaciones, que simples relaciones formales por convencionalismo.

Las individualidades: un subjuego perfecto

Abundan ejemplos en la historia del fútbol donde se demuestra que las grandes capacidades individuales de un jugador particular definen el triunfo de su equipo. Como ya manifestamos anteriormente las acciones cooperativas o de equipo al interior de un partido de fútbol deben concluir en el triunfo. De esta manera, un jugador dotado de cualidades únicas, define un subjuego perfecto en el cuál debe cumplirse el objetivo del equipo, hacer goles y ganar. Los astros del fútbol mundial, entre ellos Maradona, Pelé, Beckham, Ronaldo, Zidane, Ronaldinho en innumerables ocasiones se han tomado de manera unilateral la responsabilidad del equipo, y lo han llevado al triunfo ¡afortunadamente! Sin embargo, las individualidades por excelentes que parezcan han traído también resultados desastrosos, dando razón a la teoría al afirmar que en un juego cooperativo el aparecimiento de individualidades siempre dará resultados inferiores o iguales al juego en equipo (Hammerstein 2003).

Atrition entre oponentes y dilema del prisionero entre compañeros

En un juego de fútbol se manifiestan de manera simultánea dos características indisolubles: cooperación interna y competencia externa. Dicho de otra manera, es la coexistencia de juegos cooperativos y no-cooperativos. Aunque en teoría cada equipo debería exclusivamente cooperar al interior, se presentan ciertas individualidades, no sólo de los jugadores estrellas. Es importante notar, además, que la interacción entre dos jugadores de un mismo equipo está representada por el juego bimatricial del dilema del prisionero, mientras que la interacción entre dos jugadores de distinto equipo está representada por atrition. Esta reflexión es válida, pues, las utilidades de atrition llegan a tener valores negativos, algo totalmente congruente con la realidad, debido a que en ciertas ocasiones producto de la interacción entre dos jugadores de distinto equipo se producen lesiones físicas graves (roturas de piernas, cabeza incluso daños en órganos internos). En la interacción de dos jugadores del mismo equipo, modelizada como dilema del prisionero, la interacción estratégica se reduce simplemente a cooperar o no, sin llegar al grado de la agresión que se manifiesta explícitamente en atrition (ver teoría de juegos en Myerson 1991; Bar-Yam 1997; Boccara 2004; Jiménez y Moya 2005).

Para facilidad de comprensión este artículo se ha estructurado de la siguiente manera: la introducción establece de manera cualitativa los aportes teóricos de la correlación cuántica. La sección cuantitativa, presentada a través del operador entanglement, establece los teoremas necesarios de la correlación como elemento fundamental de la cooperación. Las conclusiones y el apéndice dan una estructura integral a este artículo, pues desde la perspectiva práctica, induce una serie de consejos adecuados para entrenadores y estrategas de un equipo de fútbol.

Cooperación y operador entanglement

Para describir un juego entre dos equipos, se usa estrategias dinámicas, las cuales representan un jugador. Cada par de jugadores definen un subjuego simétrico bimatricial. La interacción entre los dos equipos se da bajo el esquema es estratégico tradicional, en tanto que la interacción entre cada par de estrategias se da bajo un esquema de un juego simétrico bimatricial (dilema del prisionero o atrition). Para los jugadores de un mismo equipo la interacción es tipo dilema del prisionero, mientras que la interacción entre jugadores de un equipo contrario es atrition. Los tradicionales juegos de fútbol, baloncesto, voleyball, en los cuales se manifiestan simultáneamente dos características cooperación interna (entre cada jugador del equipo) y competencia externa (entre los equipos oponentes), obedecen a la formalización aquí presentada, la cual es nueva en la ciencia del fútbol por tres características:

1. No existe en la literatura ninguna analogía totalmente fundamentada, respecto al dilema del prisionero y su interconexión con interacciones entre compañeros, como tampoco, ninguna analogía entre atrition e interacción entre jugadores de equipos contrarios.
2. Por otro lado, la introducción de juegos cuánticos en espacios de Hilbert presenta potencialidades interesantes en fútbol y Teoría de Juegos.
3. Desde una perspectiva causalista, resulta interesante que la cooperación interna aparece de manera natural al introducir el entanglement, por lo tanto, los modelos aquí presentados tienen ci-erta complejidad matemática la cuál no anula la intuición estratégica y macroeconómica.

Sea $\Gamma = (I, S, v)$ un juego finito bajo la representación estratégica, con I el conjunto de equipos de cardinalidad dos, entonces cada equipo es notado $1,2 \in I$.

El conjunto S_i de cardinalidad m_1, $m_2 \in N$ es el conjunto de estrategias puras de cada equipo $i \in I$, $(S_{ij})_{j \in J_i} \in S_i$, $J_i = \{1,..,m_i\}$ y $S = \Pi_{i \in I}$ S_i designa el conjunto de perfiles en estrategia pura para el juego. Con $s \in S$ un elemento de este conjunto. La función $v : S \rightarrow R^n$ asocia a cada perfil $s \in S$ el vector de utilidades $v(s) = (v_1(s), ..., v_n(s))$, donde $v_i(s)$ designa la utilidad del equipo i ejecutando el perfil s. Si es permitida la composición de estrategias mixtas entonces tenemos: $\Delta(S_i) = \left\{p_i \in R^{m_i} : \sum_{j \in S_i} p_{ij} = 1\right\}$

Es la extensión del juego a una estrategia mixta para cada equipo $i \in I$.

Notaremos $(p_{ij})j \in J_i$. El conjunto de perfiles en estrategia mixta para el poliedro Δ con $\Delta = \Pi_{i \in I}$ $\Delta(S_i)$ y $p \in \Delta$ un punto de Δ, donde $p = (p_{1j}, .., p_{nj})$ y $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{im_i})$.

La función $u : \Delta(S) \rightarrow R^n$ asocia a cada perfil en estrategia mixta, $(p \in \Delta)$ el vector de utilidades esperadas $u(p) : \Delta(S) \rightarrow R^n$ tal que entonces esto sea: $\bar{u}(p) = (\bar{u}_i(p_i(s_{ij})_{j \in J_1}), ..,$ $(\bar{u}_j(p_i(s_{ij})_{j \in J_i}), ..., (\bar{u}_n(p_i(s_{nj})_{j \in J_n}))$ donde J_i =

$\{1,..,mi\}$ e indica la utilidad esperada para el equipo $i \in I$.

Cada $(u_i(1, p_{-i}, (s_{ij})_{j\in J_i}), ..., u_i(m_i, p_{-i}, (s_{ij})_{j\in J_i}))$ representa las preferencias de los equipos $i \in I$. La tripleta $(I, \Delta, \bar{u})$ designa la extensión del juego Γ a estrategia mixta.

Si la función de pago o utilidad es definida por $u_i(p) = \sum_{s\in S} p(s)u_i(s)$, donde $p(s) = \Pi_{i\in I} p_i(s_i)$ y si $p = (p_{1j},..,p_{nj}) \in \Delta$, entonces se obtiene el equilibrio de Nash competitivo, si y solamente si, para cada equipo $i \in I$, y para todo $p_i \in \Delta(S_i)$, se mantiene la siguiente desigualdad $\bar{u}(p^*) \geq \bar{u}_i(p_i, p^*_{-i})$, donde p^* es una estrategia óptima.

Un sub juego cuántico de dos jugadores (estrategias) puede representarse como $\Gamma = (H, \ell, S_A, S_B, P_A, P_B)$ donde H es el espacio de Hilbert definido por los dos jugadores, ℓ es la matriz de densidad, S_A, S_B los espacios de estrategias accesibles a cada uno de los jugadores y P_A, P_B los funcionales de utilidad respectivos. Una estrategia cuántica es una operación cuántica, Eisert J; M Wilkens and Lewenstein (1999).

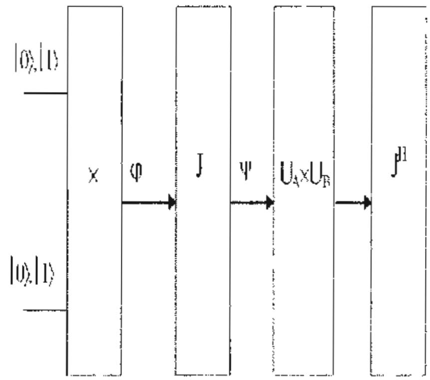


Figura 1. Proceso de Correlación

En la etapa inicial del juego los dos jugadores se encuentran no correlacionados en cualquiera de los cuatro estados iniciales $|00\rangle, |11\rangle, |01,\rangle, |10\rangle$. Se aplica el operador de entanglement $J = \exp(i\frac{\gamma}{2} D\otimes D)$ a los dos jugadores.

Este operador correlaciona o pone en entanglement las estrategias de los jugadores, dando como resultado, uno de los cuatros estados de máximo entanglement $|\psi_{cc}\rangle, |\psi_{CD}\rangle, |\psi_{DC}\rangle, |\psi_{DD}\rangle$.

El máximo entanglement se obtiene para $\gamma = (\Pi/2)$, en tanto que no-entanglement es cuando $\gamma = 0$. Al menos desde el punto de vista teórico, existen varias formas de obtener jugadores en entanglement $J = \exp\left(1\frac{\gamma}{2} U_A \otimes U_B\right)$, sin perder generalidad y con el objeto de facilitar la explicación hemos seleccionado $U_A \otimes U_B = D \otimes D$, donde la matriz D es un caso particular del operador de evolución $D = U(\Pi)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 1: Estados Iniciales. Estos estados se obtienen como el producto tensorial de los vectores[5] $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

Sea la función de estado inicial construida como la superposición lineal de los estados fundamentales.

$$|\varphi\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2 + |01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle \quad (1)$$

Donde la probabilidad de obtener el estado $|00\rangle$ es $|\alpha_1|^2$, de igual manera para los otros estados $|\alpha_2|^2, |\alpha_3|^2, |\alpha_4|^2$.

Definición 2: Operador de Entanglement J. Este operador permite correlacionar o poner en máximo entanglement las estrategias de cada jugador.

$$J = \exp\left(i\frac{\pi}{4}D \otimes D\right)$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Si a la función de onda inicial le aplicamos un operador de entanglement tenemos:

$$|\psi\rangle = J|\varphi\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha_1 J|00\rangle + \alpha_2 J|01\rangle + + \alpha_3 J|10\rangle + \alpha_4 J|11\rangle \quad (3)$$

$$|\psi\rangle = \alpha_1|\psi_{CC}\rangle + \alpha_2|\psi_{CD}\rangle + + \alpha_3|\psi_{DC}\rangle + \alpha_4|\psi_{DD}\rangle$$

Definición 3: Sistema de Referencia de Entanglement. Llamaremos sistema de referencia en entanglement al sistema formado por los siguientes vectores.

		C	A
		q	1-q
C	p	$\frac{v}{2},\frac{v}{2}$	$0, v$
A	1-p	$v, 0$	$\frac{v}{2}-c, \quad \frac{v}{2}-c$

Donde V representa beneficio y C representa costos que se distribuyen en un conflicto, quién gana el conflicto es el de mayor relación beneficio /costo. Para el Caso del Dilema del Prisionero $V = 6$, $C=3$, existe un equilibrio de conflicto en estrategia pura $(p = 0, q = 0)$ y no existe un equilibrio en estrategia mixta. Para el caso de Attrition V=2, C=2 se tiene dos equilibrios en estrategia pura $(p=0,q=1)$ $(p=1,q=0)$ y un equilibrio en estrategia mixta $(p=\frac{1}{2},q=\frac{1}{2})$.

El teorema sobre el operador entanglement que a continuación se demuestra, es el eje del trabajo desarrollado no solo por presentar una explicación formal de las intuiciones de los estrategas del fútbol (comentadores, entrenadores, jugadores) sino también por hacer evidente la existencia de una nueva característica al interior de un juego de fútbol -la cooperación a través de la potenciación y el uso del entanglement- entendido como la capacidad de diseñar, coordinar y ejecutar jugadas de laboratotio de manera natural.

[5] Nótese que hemos utilizado

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\alpha\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 1. El operador de entanglenment aplicado a un juego simétrico, jamás reduce el valor de la probabilidad de cooperación p.

Prueba. Primero, escribamos las equi valencias entre las probabalidades clásicas y las cuánticas de un juego no-entanglement:

$$|\alpha_1|^2 = p^2, |\alpha_2|^2 = |\alpha_3|^2 = (1-p)p,$$
$$|a_4|^2 = (1-p)^2.$$

La cooperación es factible si y sola-mente sí p aumenta. Para el juego simétrico que estamos analizando $p = q$, tenemos una función de estado en máximo entanglement $|\psi\rangle$ y la otra en no-entanglement $|\varphi\rangle$.

Después de realizar algunas operaciones sobre la función $|\varphi\rangle$ se tiene:

$$|\varphi\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle \quad (5)$$

$$|\psi\rangle = \alpha_1 J|00\rangle + \alpha_2 J|01\rangle + \alpha_3 J|10\rangle + \alpha_4 J|11\rangle \quad (6)$$

$$|\psi\rangle = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_4)}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{(\alpha_2 + i\alpha_3)}{\sqrt{2}}|01\rangle + \quad (7)$$
$$\frac{(\alpha_3 + i\alpha_2)}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{(\alpha_4 + i\alpha_1)}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

En el caso cooperativo $|00\rangle$, la probabilidad de obtener cooperación para jugadores en entanglement es $\frac{|\alpha_1|^2 + |\alpha_4|^2}{2}$

Observación 1. Aplicando el teorema anterior al juego del Dilema del Prisionero, se puede observar que el entanglement siempre aumenta la probabilidad de cooperación, que inicialmente era $p=0$ hasta el valor $p = \frac{|\alpha_1|^2 + |\alpha_4|^2}{2} = \frac{1}{2} > 0$, Pues el equilibrio en estrategia pura $(p = 0, q = 0)$ elimina la cooperación y privilegia la competencia.

Observación 2. En el juego de atrition, la probabilidad de cooperación inicial de $p=\frac{1}{2}$ permanece invariante frente al operador de entanglement.

De manera general, luego de aplicar el operador de evolución a la función $|\psi\rangle$ obtenemos $U_A \otimes U_B|\psi\rangle$. Tomemos en consideración que el operador U_A actúa sobre el jugador A mientras el operador[6] U_B sobre el jugador *B*. Notemos que para un caso particular el operador de evolución $C = U(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y $D = U(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(U_A \otimes U_B)|\psi\rangle = \alpha_1(U_A \otimes U_B)J|00\rangle +$$
$$\alpha_2(U_A \otimes U_B)J|01\rangle + (\alpha_3(U_A \otimes U_B)J|10\rangle \quad (9)$$
$$+\alpha_4(U_A \otimes U_B)J|11\rangle$$

---

[6] $$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$
$$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}$$

La matriz de densidad general en entanglement se construye de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= (U_A \otimes U_B)|\psi\rangle\langle\psi|(U_A \otimes U_B)^H \\ &= (U_A \otimes U_B)J|\varphi\rangle\langle\varphi|J^H(U_A \otimes U_B)^H\end{aligned} \quad (10)$$

Para el caso que los vectores no se encuentren en entanglement

$$U(\theta)\otimes U(\phi)=\begin{pmatrix} \cos(\varphi/2)\cos(\theta/2) & \sin(\varphi/2)\cos(\theta/2) \\ -\sin(\varphi/2)\cos(\theta/2) & \cos(\varphi/2)\cos(\theta/2) \\ -\cos(\varphi/2)\sin(\theta/2) & -\sin(\varphi/2)\sin(\theta/2) \\ \sin(\varphi/2)\sin(\theta/2) & -\cos(\varphi/2)\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi/2)\sin(\theta/2) & \sin(\varphi/2)\sin(\theta/2) \\ -\sin(\varphi/2)\sin(\theta/2) & \cos(\varphi/2)\sin(\theta/2) \\ \cos(\varphi/2)\cos(\theta/2) & \sin(\varphi/2)\cos(\theta/2) \\ -\sin(\varphi/2)\cos(\theta/2) & \cos(\varphi/2)\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$\rho(t)=(U_A \otimes U_B)|\varphi\rangle\langle\varphi|(U_A \otimes U_B)^H \quad (11)$$

Vale la pena notar que si las matrices $|\psi\rangle\langle\psi|$ y $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ están relacionados bajo una transformación unitaria *J*, tal que $J|\varphi\rangle\langle\varphi|J^H = |\psi\rangle\langle\psi|$ entonces las matrices $|\psi\rangle\langle\psi|$ y $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ tienen los mismos valores propios y la misma ecuación característica, Ben Noble, (1969: 312). Es evidente que la transformación $J = \exp(i\gamma D \otimes D/2)$, es unitaria, además.

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| = J^H|\psi\rangle\langle\psi|J \quad (12)$$

Definición 6 La matriz $J = \exp(i\gamma D \otimes D/2)$ es unitaria, pues es evidente verificar que $J^H J = JJ^H = 1$.

Definición 7 Si existe una matriz J tal que $J^H|\psi\rangle\langle\psi|J = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, la matriz $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ está relacionada a la matriz $|\psi\rangle\langle\psi|$ por medio de una transformación unitaria.

La relación existente entre las matrices $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ y $|\psi\rangle\langle\psi|$ no es más que la aplicación de un concepto básico del Álgebra Lineal. Una vez más nos damos cuenta que los fundamentos, son los elementos esenciales de toda teoría

Teorema 2 Si la matriz $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ está relacionada con la matriz $|\psi\rangle\langle\psi|$ por medio de una transformación unitaria entonces $|\psi\rangle\langle\psi|$ y $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ tienen los mismos valores propios y la misma ecuación característica.

Prueba Si *J* es unitaria, entonces $J^H J = 1$ y $\det J^H \det J = 1$. Si $J^H|\psi\rangle\langle\psi|J = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, entonces:

$$\begin{aligned}\det(|\varphi\rangle\langle\varphi| - \lambda I) &= \det(J^H|\psi\rangle\langle\psi|J - \lambda I) \\ &= \det J^H(|\psi\rangle\langle\psi| - \lambda I)J \\ &= \det J^H \det(|\psi\rangle\langle\psi| - \lambda I)\det J \\ &= \det(|\psi\rangle\langle\psi| - \lambda I)\end{aligned} \quad 13)$$

Con lo cual $\psi\ \psi$ y $\varphi\ \varphi$ tienen los mismos valores propios y la misma ecuación característica.

Con el teorema anterior estamos en condiciones de realizar todos nuestros análisis en función de la base ortogonal construida por 00 , 01 , , 10 , 11 .

Es interesante notar que si tomo como punto de partida los jugadores no-entanglement el operador de evolución está dado por $(U_A \otimes U_B)J$, y la base ortogonal por 00 , 01, , 10 , 11 , en tanto que si tomo como punto de partida los jugadores entanglement, el operador de evolución es simplemente $(U_A \otimes U_B)$, y la base de vectores es $|\psi_{CC}\rangle, |\psi_{CD}\rangle$, $|\psi_{DC}\rangle, |\psi_{DD}\rangle$.

La definición del valor esperado del operador entanglement, está totalmente relacionado con la utilidad de Von Newman, pues las diferentes trazas parciales son equivalentes a las probabilidades a posteriori, noción fundamental del análisis bayesiano en Teoría de Juegos.

Definición 8 El valor esperado de un operador, tal como la utilidad A se obtiene como:

$$\langle A\rangle(t) = T_z\left\{\sum_{i=1}^{4} a_k \Pi_k \rho(t)\right\} \quad (14)$$

$$= A_{CC}T_z\{X\rho(t)\} + A_{CD}T_z\{Y\rho(t)\} + A_{DC}T_z\{Z\rho(t)\} + A_{DD}T_z\{T\rho(t)\}$$

Donde los operadores de Krauss $\Pi_n \in \{X,Y,Z,T\}$ están definidos por: X= $00\ 00$; $Y = 01\ 01$; $Z = 10\ 10$; $T = 11\ 11$ en la base original (no-entanglement) y como X = $\psi_{CC}\ \psi_{CC}$ |; Y = $\psi_{CD}\ \psi_{CD}$; Z = $\psi_{DC}\ \psi_{DC}$; T= $\psi_{DD}\ \psi_{DD}$, en la base de máximo entanglement.

El símbolo $T_Z\{X\rho(t)\}$, se lee como traza de la matriz $X\rho(t)$.

Sean las siguientes funciones de onda para un juego equiprobable:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{4}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

$$|\varphi\rangle = \frac{1+i}{4\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1-i}{4\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1-i}{4\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1+i}{4\sqrt{2}}|11\rangle \quad (15)$$

Solo a manera de ejercicio es útil verificar que las matrices[7] $\psi\ \psi$ y

---

[7] $$|\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & i & i & 1 \\ -i & 1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & 1 \end{pmatrix}$$

$|\varphi\rangle\langle\varphi|$ tienen la misma ecuación característica (λ^4-$4\lambda^3$=0) y por lo tanto los mismos valores propios .

Es importante notar que con las dos bases de vectores podemos encontrar los valores esperados de utilidad. En especial, miremos la simetría existente entre las trazas parciales del operador densidad. Nótese que para facilidad de cálculo

$$U = U_A \otimes U_B \text{ y } V = U^H .$$

Utilizando los proyectores $X = |00\rangle\langle 00|$; $Y = |01\rangle\langle 01|$; $Z = |10\rangle\langle 10|$; $T = |11\rangle\langle 11|$ las trazas parciales para las matrices $|\psi\rangle\langle\psi|$ y $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ son:

$$Tz\{XU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{YU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = -\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{ZU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = -\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{TU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{XU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{YU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{ZU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = -\frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{TU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = -\frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

Utilizando los proyectores X $= |\psi_{CC}\rangle\langle\psi_{CC}|$; Y $= |\psi_{CD}\rangle\langle\psi_{CD}|$; Z $= |\psi_{DC}\rangle\langle\psi_{DC}|$; T$= |\psi_{DD}\rangle\langle\psi_{DD}|$, las trazas parciales para las matrices $|\psi\rangle\langle\psi|$ y $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ son:

$$Tz\{XU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = -\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{YU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{ZU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = -\frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tz\{TU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = -\frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tr\{XU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tr\{YU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = -\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

$$Tr\{ZU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = -\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{16}$$

$$Tr\{TU|\psi\rangle\langle\psi|V\} = \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{16}$$

Al obtener la total equivalencia de resultados, al utilizar la descomposición de $|\psi\rangle\langle\psi|$ y φ φ, al encontrar los valores esperados y las trazas parciales de las matrices de las funciones de estado, una vez más se verifica que los conceptos de la Mecánica Cuántica utilizados, son por demás adecuados a la formulación de la correspondencia de estrategias y jugadores.

Apéndice

Se ha demostrado que el fútbol es un deporte donde se manifiestan varias acciones de distinta naturaleza: cooperativas, competitivas y cooperativas /competitivas. Cuando un equipo de fútbol lidera un partido y está en sus pies el balón, entonces las acciones que se dan son cooperación interna para intentar hacer gol y competencia externa para evitar perder el balón. Si un equipo de fútbol no tiene enraizada la cooperación, entonces lograr el objetivo mayor, hacer goles, es improbable.

Es totalmente innovador representar un juego de fútbol utilizando el Instrumental de la teoría de juegos. Sin embargo, se introducen elementos nuevos tales como cooperación interna y competencia externa, de manera simultánea. Dicho de otra manera es la coexistencia de juegos cooperativos y no-cooperativos, aunque en teoría, cada equipo solamente manifieste uno de ellos en un instante de tiempo.

Es importante notar, además, que la interacción entre dos jugadores de un mismo equipo está representada por el juego bimatricial del dilema del prisionero, mientras que la interacción entre dos jugadores de distinto equipo está representada por atrition. Esta reflexión es válida, pues, las utilidades de atrition llegan a tener valores negativos, algo totalmente congruente con la realidad, debido a que en ciertas ocasiones producto de la interacción entre dos jugadores de distinto equipo se producen lesiones físicas graves (roturas de piernas, cabeza incluso daños en órganos internos).

En la interacción de dos jugadores del mismo equipo, modelizada como dilema del prisionero, la decisión ejecutada es simplemente cooperar o no, sin llegar al grado de la agresión que se manifiesta explícitamente en atrition.

Apéndice

Bases de Vectores

Sea una base ortogonal construida sin entanglement, de la siguiente forma:

$$|00\rangle=|0\rangle\otimes|0\rangle|=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\qquad |01\rangle=|0\rangle\otimes|1\rangle|=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$|10\rangle=|1\rangle\otimes|0\rangle|=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\qquad |11\rangle=|1\rangle\otimes|1\rangle|=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};$$

Los respectivos operadores de Krauss de la base son:

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=|00\rangle\langle 00|\qquad Y=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=|01\rangle\langle 01|$$

$$Z=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=|10\rangle\langle 10|\qquad I=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=|11\rangle\langle 11|$$

La base construida por los vectores entanglement es:

$$|\psi_{CC}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle+i|11\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\i\end{pmatrix};|\psi_{CD}\rangle$$

$$|\psi_{CC}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle\ \ i|10\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-i\\0\end{pmatrix};$$

$$|\psi_{DC}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle-i|01\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-i\\1\\0\end{pmatrix};|\psi_{DD}\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|11\rangle+i|00\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\0\\0\\1\end{pmatrix};$$

Los operadores de Krauss de la base en entanglement: son:

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&-i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\i&0&0&1\end{pmatrix}=|\psi_{CC}\rangle|\psi_{CC}\rangle;$$

$$Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&i&0\\0&-i&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=|\psi_{CD}\rangle|\psi_{CD}\rangle;$$

$$Z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-i&0\\0&i&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=|\psi_{DC}\rangle|\psi_{DC}\rangle;$$

$$T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\i&0&0&1\end{pmatrix}=|\psi_{DD}\rangle|\psi_{DD}\rangle;$$

Es sumamente fácil verificar que para las dos bases se cumple:

$$XX^H\neq 0;\quad YY^H\neq 0, ZZ^H\neq 0,\quad TT^H\neq 0,$$
$$XY^H=XZ^H=XT^H=YZ^H=YT^H=ZT^H=0$$

Bibliografía citada

Bar-Yam, Y (1997). *Dynamics of Complex Systems*. Massachusetts. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Boccara, N (2004). *Modeling Complex Systems*. Heidelberg: Springer- Verlag, Heidelberg.

Einstein, A. Podolsky, B and Rosen, N. (1935). Phys. Rev. 47, 777.

Eisert J; M Wilkens and Lewenstein (1999) *Quantum Games and Quantum Strategies*, Phys. Rev. Lett. 83, 307-3080.

Hammerstein, P, Ed (2003). *Genetic and cultural evolution of cooperation*, MIT Press.

Jiménez, E and Moya, D (2005.) *Econophysics: from game theory and information theory to quantum mechanics*. Physica A, 348C pp 505-543.

Meyer P.A (1995). *Quantum probability for probabilities*. Lecture Notes in Mathematics 1538. Springer-Verlag, Berlin.

Myerson, R. (1991). *Game theory analysis of conflict*. Massachusetts: Harvard University Press.

Noble, Ben (1969). *Applied Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall.

Bibliografía consultada

Aumann, R. J. (1987). *Correlated Equilibria as an Expression of Bayesian Rationality*. Econometrica 55:1-18.

Bouwmeester, D. Eckert, A and Zeilinger, A (2001). *The Physics of Quantum Information*, Springer-Verlag, London, UK.

Braunstein, S (1999). *Quantum Computing*, Wiley-Vch, Weinheim, Germany.

Hirvensalo. M (2001). *Quantum Computing*. Springer-Verlag, Berlin.

Jara, C. J. (2001). *As Dimensoes Intangíveis do desenvolvimento Sustentável*, IICA, Octubre.

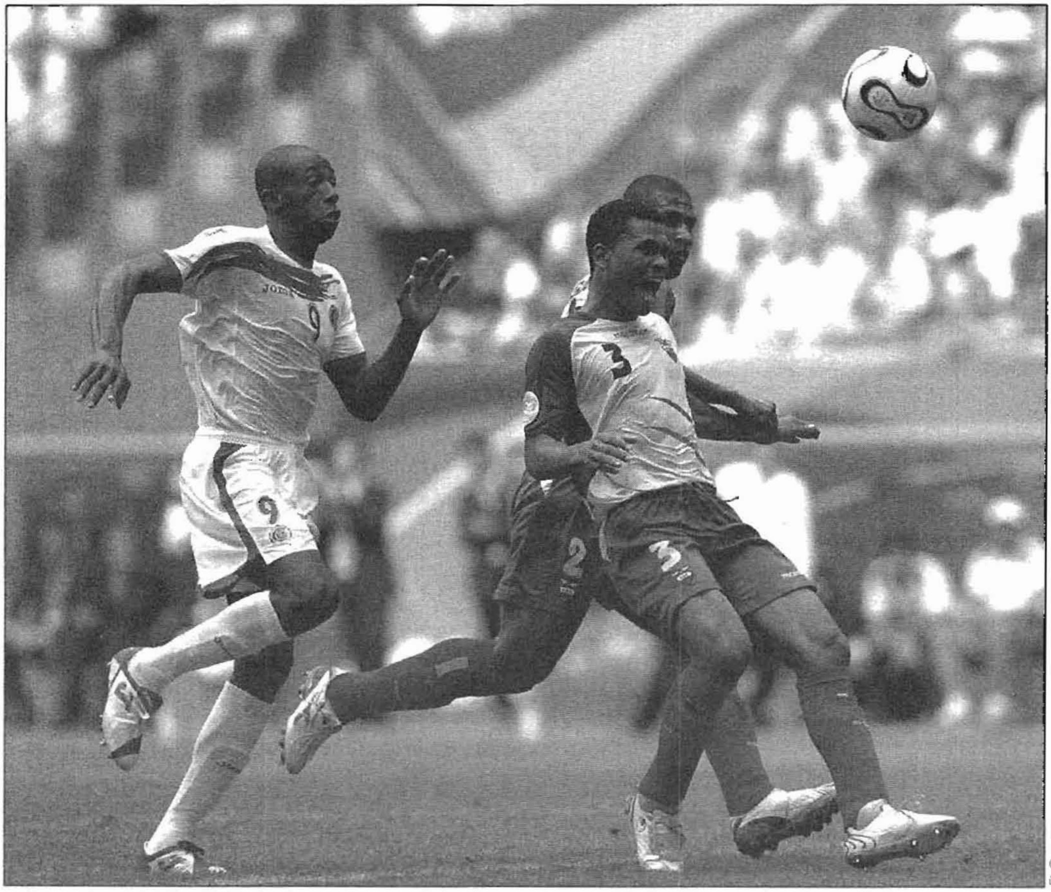
Jiménez, E.H (2003a). *Quantum Games and Minimum Entropy*. Lecture Notes in Computer Science 2669, p 216-225. Springer, Canada.

Jiménez, E.H (2003b). "Quantum Games: Mixed Strategy Nash's Equilibrium Represents Minimum Entropy", *Journal of Entropy*. Vol 5, Issue 4, 313-347.

Machiavello, C. Palma, G and Zeilinger, A (2000). *Quantum Computation and Quantum Information Theory*. World Scientific, London, UK.

Nielsen, M and Chuang, I (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

Palomino, F et al. (2000). *Skill, Strategy, and Passion: an Empirical Analysis of Soccer*. http: // ideas.repec.org /p/ecm/wes2000/1822.html.



El Comercio